NUMEROS.20 - 1990
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

DESIGUALDADES ELEMENTALES ENTRE LOS ANGULOS Y ENTRE LOS LADOS DE UN TRIANGULO

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
I.B. ISABEL DE CASTILLA
AVILA

En este artículo presentamos una investigación elemental en el aula sobre unas desigualdades entre los ángulos y lados de un triángulo cualquiera.

La técnica de demostración elemental de estos resultados es el método de reducción al absurdo o indirecto, que se utiliza frecuentemente en Matemáticas para la demostración de algunos teoremas, incluso elementales: existen infinitos números primos, el número $\sqrt{2}$ es un número irracional, ...

CONCEPTOS INICIALES.

Suponemos conocidos los triángulos euclídeos planos y su clasificación con relación a los lados y ángulos.

Además, suponemos conocidos, por manipulación o por demostración rigurosa, los teoremas siguientes:

1°) *Para que con tres segmentos de longitudes a, b, y c, se pueda formar un triángulo, es necesario y suficiente que, cualquiera de ellos sea menor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular).*

2°) *La suma de los tres ángulos de un triángulo es dos rectos (relación fundamental entre los tres ángulos de un triángulo plano).*

3°) *En todo triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.*

4°) *En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente.*

DESIGUALDADES ENTRE LOS ÁNGULOS Y LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.

Comenzamos con la demostración de nuestro resultado.

TEOREMA.- Sea ABC un triángulo rectángulo cualquiera. Sean A, B y C sus ángulos, con $A \leq B < C = 90^\circ$, $A + B = 90^\circ$, y a, b y c sus lados, con $a \leq b < c$. Entonces, se tiene entre sus ángulos y entre sus lados, respectivamente, las siguientes desigualdades:

a) $A \leq 30^\circ \leq 45^\circ \leq 60^\circ \leq B < 90^\circ$ ó $30^\circ \leq A \leq 45^\circ \leq B \leq 60^\circ < 90^\circ$

b) $\frac{a}{c} \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{b}{c} < 1$, ó $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{c} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{b}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

DEMOSTRACION.- a) Como los ángulos A y B son agudos y $A + B = 90^\circ$, necesariamente se ha de tener que $A \leq 45^\circ \leq B$, ya que las posibilidades $A < B < 45^\circ$ y $45^\circ < A < B$ es obvio que dan contradicción con el hecho de que $A + B = 90^\circ$.

De otra parte, es claro que al ángulo B le caben las dos únicas posibilidades siguientes:

$A \leq 45^\circ < 60^\circ \leq B < 90^\circ$ [1] ó $A \leq 45^\circ \leq B \leq 60^\circ < 90^\circ$ [2].

Con relación a [1] y tomando ahora 30° como ángulo de referencia con relación a A ($30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, 30° y 60° son las medidas de dos ángulos complementarios), caben, a su vez, dos posibilidades: $30^\circ < A < 45^\circ < 60^\circ < B < 90^\circ$, que es absurdo ya que $A + B > 90^\circ$; y $A \leq 30^\circ < 45^\circ < 60^\circ \leq B < 90^\circ$, que sí puede ser.

Con relación a [2] y tomando A con relación a 30°, tenemos las dos posibilidades siguientes: $A < 30^\circ < 45^\circ < B < 60^\circ < 90^\circ$, que es absurdo ya que $A + B < 90^\circ$; ó $30^\circ \leq A \leq 45^\circ \leq B \leq 60^\circ < 90^\circ$, que sí puede ser.

b) Tomando en las desigualdades de a) cualquier línea trigonométrica, por ejemplo, la función seno, y teniendo en cuenta que ésta es creciente en el intervalo de variación de los ángulos A y B, obtenemos las siguientes desigualdades entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{c} \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{b}{c} < 1 \text{ , ó } \frac{1}{2} \leq \frac{a}{c} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{b}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

Observaciones.- 1°) Se puede intentar generalizar este teorema para cualquier tipo de triángulo: acutángulo u obtusángulo.

2°) En un triángulo rectángulo las desigualdades entre los ángulos y los lados, se pueden establecer también así: se demuestran para los lados primero, teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras y que los catetos son menores que la hipotenusa (restar para ello, en todos los casos, los cuadrados de los dos miembros de la desigualdad que queremos probar). Después, se ponen estas desigualdades de forma que intervenga una línea trigonométrica, y tomando la función inversa de ésta en el intervalo apropiado, se tiene el resultado.

3°) En estas desigualdades pueden intervenir otras magnitudes relacionadas con el triángulo, como el perímetro, el área, los radios del círculo inscrito y circunscrito al triángulo, etc.

4°) El triángulo rectángulo utilizado como recurso metodológico y didáctico, nos permite demostrar, a partir de la trigonometría del triángulo rectángulo que, la función seno, por ejemplo, es creciente entre 0° y 90°. Después, y tomando como base ésta, se puede probar también, la monotonía de la función coseno (decreciente), y la función tangente (creciente), respectivamente, en el intervalo de 0° a 90°.

BIBLIOGRAFÍA.

P. Puig Adam : Geometría Métrica, I y II. Madrid, 1966.

H. Eves : Estudios de la Geometría, I y II. Uteha. México, 1969.

J.B. Romero Márquez : Diversas formas de estudiar la semejanza entre triángulos en la geometría elemental. (Por aparecer)

J.B. Romero Márquez : La media aritmética y algunas desigualdades sobre los ángulos de un polígono. (Por aparecer)

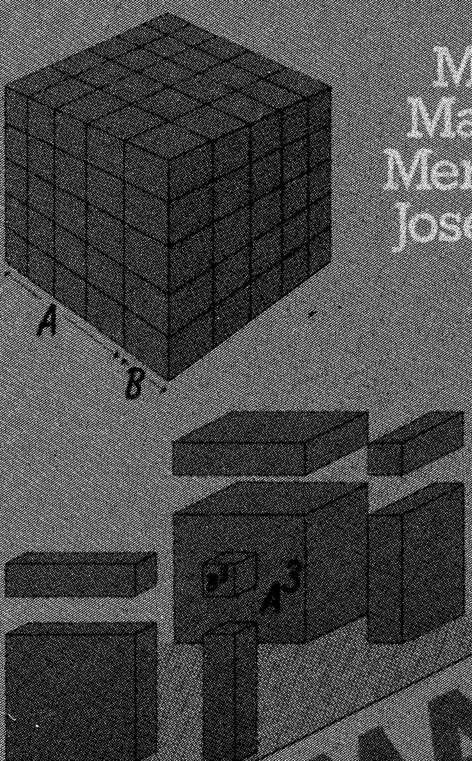
H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer: Geometry revisited. Random House, N.Y.

E. Roanes: Geometría. Anaya. 1983.

INICIACION AL ALGEBRA

23

Martín M. Socas
Matías Camacho
Mercedes Palarea
Josefa Hernández



MATEMATICAS:
cultura y aprendizaje

EDITORIAL
SINTESIS