NUMEROS. 18 - 1988

LA PROPORCIONALIDAD Y LA RESOLUCION DE ECUACIONES

Juan Bosco Romero Márquez
I.B. "Isabel de Castilla"
Avila

INTRODUCCION

Presentamos en este artículo el uso de la proporcionalidad entre magnitudes o números reales como un recurso metodológico y didáctico interesante que, mediante el empleo de las propiedades de las proporciones (sumas, restas y multiplicación), abrevia y simplifica el cálculo, tedioso en muchas ocasiones, y puede servir, además, como una estrategia interesante en Algebra elemental, para resolver problemas.

Este trabajo ha sido experimentado, con resultados aceptables, con alumnos de 1º y 2º de BUP.

DEFINICIONES

Si a, b, c, d son las cantidades o números reales, se dice que son proporcionales si las razones a/b y c/d son iguales, es decir, si existe un número real k, no nulo, llamado *constante de proporcionalidad*, tal que

$$a/b = c/d = k \quad (\textit{proporción})$$

Los términos a y d se llaman *extremos*; b y c, *medios*. Se dice también que a y c son los *antecedentes* y b y d los *consecuentes*.

Se dice que la proporción es *continua*, o que a, b, c, d están en proporción continua, si las razones del primero al segundo, del segundo al tercero, y así sucesivamente, forman una proporción, esto es, si

$a/b = b/c = c/d = \ldots = k$

Estas relaciones nos indican que los números $a, b, c, d, \ldots$, en este orden, forman una *sucesión geométrica* de razón k.

Si a, b y c están en proporción continua, es decir, si $a/b = b/c$ o, lo que es lo mismo, si $b^2 = a.c$, decimos que b es la *media geométrica o proporcional* entre a y c, y que c es la *tercera proporcional* a a y b.

El significado geométrico de la proporción surge al ser identificada como aplicación de semejanza entre dos figuras geométricas (longitudes).

Ya *EUCLIDES*, en sus *Elementos*, dice que "una magnitud es parte de otra cuando se mide" y, para ello, introduce los conceptos de razón de una magnitud con relación a una segunda, el de proporción y, además, demuestra las propiedades de las proporciones desde el punto de vista de la teoría de la medida de las magnitudes.

A la proporcionalidad entre las cantidades o números reales asociados respecto a sendas medidas -con sus unidades especificadas- se le representa, de forma única, mediante la *aplicación lineal*

$$X \to Y \quad , \quad y = kx \ , \ x \in X$$
$$x \to y$$

donde X e Y son, respectivamente, los conjuntos cantidades de la magnitudes $M(X)$ y $M(Y)$.

La gráfica en el plano de la aplicación anterior es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

PROPIEDADES

1. $a/b = c/d \Longrightarrow a.d = b.c$ *(Prod. de exts. = prod. de medios)*
2. $a/b = c/d$ y $e/f = g/h \Longrightarrow a.e \,/\, b.f = c.g \,/\, d.h$
3. $a/b = c/d$ y $b/x = d/y \Longrightarrow a/x = c/y$
4. $a/b = c/d$ y $r, s \in R$ y $r \neq 0$, $s \neq 0 \Longrightarrow r.a \,/\, r.b = s.a/s.b$
5. $a/b = c/d \Longrightarrow b/a = d/c$ (invirtiendo)
6. $a/b = c/d \Longrightarrow a/c = b/d$ (alternando)
7. $a/b = c/d \Longrightarrow (a+b) \,/\, b = (c+d) \,/d$ (componiendo)

Demostración.- Sumar 1 a los dos miembros.

Sumando k se obtiene una propiedad más general.

8. $a/b = c/d \Longrightarrow (a-b)/b = (c-d)/d$

La demostración y generalización son análogas al caso anterior.

9. $a/b = c/d \quad (a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$

Demostración.- Aplicar las dos propiedades anteriores.

10. $a/b = c/d$ y $s,t \in R$ son tales que $s.a + t.c$ y $s.b + t.d$ no son ambos nulos, entonces,

$a/b = c/d = (s.a + t.c)/(s.b + t.d)$

Demostración.- Partir de la propiedad 1.

11. $a/b = c/d$ y s, s', t, t' son números reales y $(s'.t - s.t') \neq 0$, entonces,

$(s.a + t.b)/(s'.a + t'.b) = (s.c + t.d)/(s'.c + t'.d)$, propiedad que conserva "las proporciones por combinaciones lineales del numerador y denominador de la proporción". O también, en términos de transformaciones, las aplicacones lineales de $R^2 \to R^2$, conservan las proporciones.

EJERCICIOS

Aplicando las propiedades anteriores se pueden deducir otras muchas. Entre ellas, las siguientes :

12. Si $(a.s + b.t)/(a.s' + b.t') = (c.s + d.t)/(c.s' + d.t')$, entonces a,b,c,d o s,t,s',t' son proporcionales.

13. $a/b = c/d = (a+c)/(b+d) = (a-c)/(b-d)$

14. $a/b = c/d = (s.a + t.c)/(s.b + t.d)$

Mediante combinaciones lineales de antecedentes y consecuentes, es decir, por columnas, se mantiene la proporción. Haciéndolo por filas, se conserva el concepto de proporción, pero se obtiene una nueva.

15. Por último, $a/b = c/d$ si y sólo si $(ac + bd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$

APLICACIONES AL ALGEBRA ELEMENTAL

1. Si $x/y = 1/2$, calcular $(4x+5y)/(6x+11y)$

2. Si $x/y = 1/2$, calcular $(ax+by)/(cx+dy)$, siempre que el denominador no se anule.

3. Si $(ax + \ell y) / (cx + dy) = k$,calcular y/x

4. Calcular lo que ha de valer y/x para que $y/x = (ax + \ell y) / (cx + dy)$,donde a, ℓ, c, d son números reales tales que el denominador no se anula (puntos invariantes o de equilibrio de la función).

5. Estudiar la función $z = (ax + \ell y) / (cx + dy)$ para $x=0$, $x=1$, $x=-1$ y $x \to \infty$. Lo mismo para los valores de la variable y. Qué significado geométrico podemos dar a la función anterior, cuando depende de la variable x (y constante), y (x constante) , y/x , x/y ?

Orientación: Comenzar, tanto para y/x como para x/y, con los valores 1,-1,2,-2 e infinito y, en general, con $y/x=m$ o $x/y=n$, donde m y n no son nulos. Estudiar también los casos límite de 0 e ∞ .

6. ¿A qué clase de aplicación se reduce la función z cuando a, ℓ, c y d son proporcionales.?

RESOLUCION DE ECUACIONES

1. Resolver en números reales la ecuación $(x^2+x-2) / (x-2) = (4x^2+5x-6) / (5x-6)$

Empleando la propiedad 8 llegamos a

$x^2 / (x-2) = 4x^2 / (5x-6)$

Dividiendo ambos miembros entre x^2, supuesto distinto de 0:

$1 / (x-2) = 4 / (5x-6)$

Multiplicando por 5 numerador y denominador del primer miembro, obtenemos

$5 / (5x-10) = 4 / (5x-6)$

Aplicando la propiedad 13, resulta

$5 / (5x-10) = 1/-4$ ó, lo que es igual, $1 / (x-2) = -1/4$, de donde, $x - 2 = -4$ y, finalmente, $x = -2$, Otra solución : $x=0$

2. Resolver en R ,por tres métodos diferentes, la ecuación

$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) / (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = (4x-1) / 2$

a) Método de las proporciones

Componiendo y dividiendo se llega a

$\sqrt{x+1} / \sqrt{x-1} = (4x+1) / (4x-3)$

Elevando ambos miembros al cuadrado es

$(x+1) / (x-1) = (16x^2+8x+1) / (16x^2-24x+9)$

Componiendo y dividiendo de nuevo, resulta

$x = (16x^2-8x+5) / (16x-4)$,de donde, finalmente, se obtiene

$x = 5/4$

La última ecuación se puede escribir, para $x \neq 0$,de la forma siguiente:

$1 = (16x^2-8x+5) / (16x^2-4x)$

En virtud de la propiedad 8, llegamos a

$0/1 = (-4x+5) / (16x^2-4x)$

Y, como el numerador tiene que ser nulo, puede escribirse:

$-4x+5 = 0$,es decir, $x=5/4$

Observación.- Cuando en una proporción aparece *cero* en un denominador como consecuencia de aplicar las propiedades de las proporciones, se debe igualar su numerador correspondiente a *cero*.

Por ejemplo, podemos escribir $x=1$ como $x/1 = 1/1$ y, por aplicación de la propiedad 13.

$(x-1) / 0 = 1$ y, en consecuencia, $x-1=0$, por lo que es $x=1$

Cuando se pasa de la ecuación de una proporción a otra, ésta puede ser o no equivalente a la inicial; depende de las operaciones que hayamos realizado para obtenerla. Por eso, conviene hacer un análisis final de las soluciones.

b) Método del conjugado del denominador

Multiplicando el numerador y denominador del primer miembro por el conjugado de éste, resulta

$x + \sqrt{x^2-1} = (4x-1) / 2$,de donde es $\sqrt{x^2-1} = (2x-1)/2$

Elevando al cuadrado y operando, obtenemos

$-5 = -4x$,esto es, $x=5/4$

c) Método del cambio de incógnita

La ecuación dada se puede escribir, con $x \neq 1$,así

$\left(\sqrt{(x+1/(x-1)} + 1\right) : \left(\sqrt{(x+1)/(x-1)} - 1\right) = (4x-1) / 2$

Haciendo $t^2 = (x+1) / (x-1)$,resulta

$(t+1) / (t-1) = (3t^2+5) / 2(t-1)(t+1)$

Por cálculo directo,o bien aplicando propiedades de las proporciones,se llega a $t=1$ y $t=3$,siendo válida sólo la última.

Finalmente,de $t=3$, se obtiene $x=5/4$

4. Resolver en números reales $(6\sqrt{x} -11) / 3\sqrt{x} =(2\sqrt{x} + 1)/(\sqrt{x} + 6)$

Sol.: $x=9$

BIBLIOGRAFIA

R.E.Johnson,L.L.Lendsey y W.E.Slesnick - Serie Matemática Moderna: Algebra - Fondo Educativo Interamericano,S.A.- 1967

M.P.Dolciani,S.L.Berman y W.Wooton - Algebra Moderna y Trigonometría - Publicaciones Cultural S.A. - México,1977

H.S.Hall y S.R.Knight - Algebra Elemental - Montaner y Simón S.A.- Barcelona,1972

F.Pluvinage , C.Dupuis - La proportionnalité et son utilisation- Institut de Recherche Mathematique Avancé - Université L.Pasteur - Strasbourg,1980

C.Dupuis et F.Pluvinage - La proportionnalité et son utilisation - Recherches en Didactique des Mathematiques - Vol.II - Université L.Pasteur - Strasbourg,1981