NUMEROS,13 — 1986

LAS PROGRESIONES Y SU ESTUDIO ARITMETICO-GEOMETRICO (Y 2)

Juan B. Romero Márquez
I.B. "Isabel de Castilla"
Avila

4. PROGRESIONES GEOMETRICAS

DEFINICIÓN 2.- Una sucesión $g : N \to R$ es una progresión geométrica si $\exists\, a, \ell \in R$, $\ell \in R-\{0\}$ y $g_n = a\ell^n$, $\forall n \in N$.

Así, una progresión geométrica se puede considerar como la restricción a N de las aplicaciones exponenciales de la recta $f(x)=a\ell^x$, donde $a, \ell \in R$ y $\ell>0$. Sin embargo, como en nuestro caso manejamos la variable discreta, aquí también es admisible $\ell \in R$.

Las funciones exponenciales se pueden introducir de forma axiomática, señalando para ello sus propiedades más notables y haciendo construir a los alumnos los grafos planos de las mismas, para los casos $\ell=2$, $\ell=3$, $\ell=1/2$, $\ell=1/3$,etc., tanto para el caso discreto como para el continuo. También, dibujar el grafo para el caso discreto $\ell=-1$, $\ell=-2$, $\ell=-1/2$,etc.

Debe hacerse observar que cada función exponencial de base $\ell>0$, $f_{a,\ell} : R \to R^+$ es biyectiva ; más aún, es un homomorfismo entre los grupos $(R , +)$ y $(R^+ , .)$. La inversa, $g_\ell : R^+ \to R$, de $f_{a,\ell}$, se llama función logaritmo en base $\ell \neq 0,1$. Se pueden admitir, por ejemplo, las propiedades de f, y demostrar las de g, y recíprocamente.

PROPOSICIÓN 7.- Si $\{a_n\}$, con $n \in N$, es una progresión aritmética, entonces, $\forall k \in R^+ - \{0,1\}$, $\{g_n = K^{an}\}$ con $n \in N$, es una progresión geométrica.

Demostración:

$$\forall n \in N \,,\quad g_n = k^{an} = k^{an+\ell} = k^{\ell}\, k^{an} = AB^n \text{ ,donde } A = k^{\ell} \text{ y } B = k^{a}$$

PROPOSICIÓN 8.- Si $\{g_n = a\ell^n\}, n \geqslant 1$, es una p.g. positiva ($g_n > 0$, $n \in N$), entonces $\{a_n = \log_k g_n\}$, $n \geqslant 1$, $k > 0$, es una p.a.

Demostración:

Se basa en las propiedades de la función logarítmica.

Como $g_n = a\ell^n$, $\forall n \in N$, es

$$\begin{aligned} a_n = \log_k g_n &= \log_k a\ell^n = \\ &\log_k a + \log_k \ell^n = \\ &\log_k a + n \log_k \ell = \\ &A + n\,B \text{ , donde} \end{aligned}$$

$A = \log_k a$ y $B = \log_k \ell$

Por todo lo anterior, el estudio de las progresiones geométricas es similar, gracias a las propiedades de la función exponencial y logarítmica, al de las aritméticas; con propiedades y conceptos análogos. Veremos esto con más detalle.

Ejercicios:

1) ¿Se puede considerar la sucesión nula como una progresión aritmética? ¿Y geométrica?

2) ¿Es la sucesión constantemente igual a 1 una p.a.? ¿Es una p.g.?

3) ¿Es la sucesión constantemente k una p.a.? ¿Es una p.g.?

4) Existen sucesiones que sean a la vez progresiones aritméticas y progresiones geométricas?

PROPOSICIÓN 9.- Si $\{g_n\}, n \geqslant 1$ es una sucesión, entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

a) $\{g_n\}$, $n \geqslant 1$ es una progresión geométrica.

b) $\forall n \geqslant 2$, $g_n / g_{n-1} = \ell$ (razón o cociente de la progresión).

c) $\forall n \geqslant 2$, $g_n / g_{n-1} = g_{n+1} / g_n$

Demostración:

Se efectúa por cálculo directo. La proponemos como ejercicio.

Lo verdaderamente importante aquí es señalar el paralelismo entre estas relaciones y las establecidas en la proposición 5.

Ejercicios:

1) Probar que :

a) Si $r>1$ y $a_1>0$, la p.g. es creciente.

b) Si $r>1$ y $a_1<0$, es decreciente.

c) Si $0<r<1$ y $a_1>0$, es decreciente.

d) Si $0<r<1$ y $a_1<0$, es creciente.

e) Si $r<0$, los signos de los términos consecutivos son opuestos.

2) Probar que si $p,q,r \in N$ y $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es una p.g., entonces

$$g_p^{\,r-q} \cdot g_q^{\,p-r} \cdot g_r^{\,q-p} = 1$$

5. CONSTRUCCION DEL SEGMENTO $a.b$

Sean los segmentos a y b y supongamos $a>b$. Sobre una recta r horizontal se lleva el segmento a, obteniéndose los puntos O y A. Se toma otra recta s cualquiera que pase por O y forme un ángulo cualquiera con r (fig.13). Sobre el segmento OA y a partir de O, se lleva el segmento unidad, obteniéndose el punto C. También a partir de O ,pero sobre la recta s, se lleva el segmento b, obteniéndose el punto B. Unimos C con B y trazamos por A la paralela a BC que corta en D a la recta s. Los triángulos OCB y OAD son semejantes y se tiene

$$1/a = b/x \Rightarrow x = ab$$

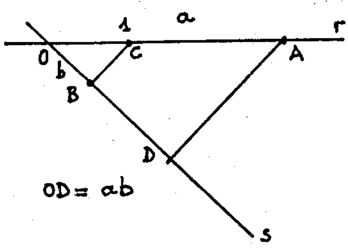


fig. 13

De la relación $g_n = \ell\ g_{n-1}\ ,\ \forall n\geq 2$,podemos construir paso a paso el diagrama lineal de la progresión geométrica $\{g_n\}_{n\geq 1}$,aplicando reiteradamente la construcción anterior como sigue: Se empieza construyendo $g_2 = \ell\ g_1$; después, $g_3 = \ell\ g_2$ y así sucesivamente.

También se puede hacer una construcción simétrica alternativa que evita la construcción de ℓ ,a partir del paso $n=3$. Para ello,se construyen g_1 y g_2 como antes. Para $n\geq 3$,se utiliza la relación

$$g_n^2 = g_{n-1}\ g_{n+1}\ ,\ \text{deducida de}\ \ g_n\ /\ g_{n-1} = g_{n+1}\ /\ g_n\ ,\forall n\geq 2$$

Esta relación prueba que,si conocemos la construcción de g_n y g_{n-1}, entonces,como $g_{n+1} = g_n^2\ /\ g_{n-1}$,podemos construir g_{n+1}. La idea consiste en interpretar a $g_n>0$ como la media geométrica de g_{n-1} y g_{n+1}, y construir esta media por el método usual (fig.14).

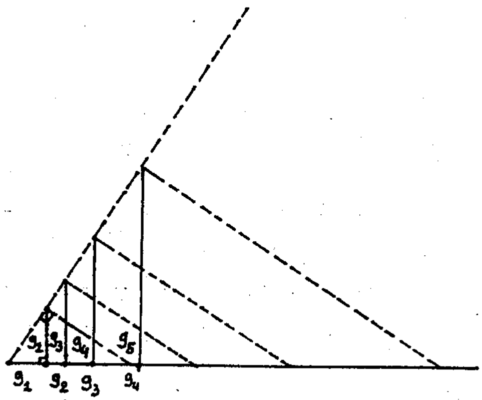


fig 14

Esto nos dice que para las progresiones geométricas positivas, la razón ℓ es la razón de semejanza de los triángulos rectángulos de catetos respectivos $g_1\ ,\ g_2\ ;\ g_2\ ,\ g_3\ ;\ \ldots\ldots;\ g_{n-1}\ ,\ g_n$, ya que sabemos que $g_2\ /\ g_1 = g_3\ /\ g_2 = \ldots\ldots = g_n\ /\ g_{n-1} = \ell$,y utilizando las propiedades de las proporciones y llamando suma parcial n-sima a

$$s_n = g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n\ ,\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \text{tenemos}$$

$$\ell = (g_2+g_3+\ldots+g_n)\ /\ (g_1+g_2+\ldots+g_{n-1}) = (s_n-g_1)\ /\ (s_n-g_n)\ ,\ \text{de-}$$

donde $s_n = (\ell\ g_n - g_1)\ /\ (\ell - 1)\ ,\ \ell\neq 1.$

Esto constituye una de las demostraciones geométricas de la suma de los términos de una progresión geométrica.

6. SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION POR METODOS GEOMETRICOS

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Dada la p.a. $\{a_n\}_{n\geq 1}$, que podemos suponer positiva y creciente sin pérdida de generalidad, sea $\{S_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión o serie de sumas parciales asociada a dicha sucesión.

De la definición de $\{S_n\}_{n\geq 1}$, tenemos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots\ldots + a_n =$$

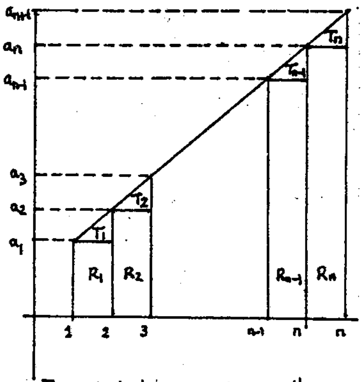
$$\textit{suma de las áreas de los rectángulos de la figura} =$$

$$A(R_1) + \ldots\ldots + A(R_n)$$

Llamemos R_n y T_n, respectivamente, a la unión de los rectángulos y triángulos de la figura, esto es

$$R_n = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n \quad \text{y} \quad T_n = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$$

Además, $A(T_i) = A(T_j)$, $i \neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$, ya que son triángulos semejantes que se obtienen por traslación.



Trapecio de bases a_1 y a_{n+1} y altura n = $= \mathcal{T} = (T_1 \cup R_1) \cup \cdots \cup (T_n \cup R_n)$

fig. 15

Entonces,

$S_n = A(R_n)$ y

$A(T_n)$ = *suma de las áreas de los triángs. rects.* (que son iguales por un movimiento) =

$$(a_2-a_1)/2 + (a_3-a_2)/2 + \ldots\ldots + (a_{n+1}-a_n)/2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)/2 = (a_{n+1} - a_1)/2$$

Tenemos dos alternativas :

1a)

Area del trapecio de bases a_1 *y* a_{n+1} *y altura* n =

$n(a_1 + a_{n+1})/2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} + a_k)/2$ =

suma de las áreas de los trapecios de bases

$(a_1\ ,\ a_2)\ ,\ldots\ldots\ldots,(a_n\ ,\ a_{n+1})$ *y altura resp.* 1

De aquí, efectuando operaciones y teniendo en cuenta que

$a_n = an + b\ ,\ n \geq$, llegamos a

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

2a)

$A(R_n) + A(T_n)$ = *area trap.de bases* a_1 , a_{n+1} *y altura* n =

$n(a_1 + a_{n+1})\ /2 \Longrightarrow S_n = A(R_n) = n(a_1 + a_{n+1})\ /2 - (a_{n+1} + a_n)/2 =$

$n(a_1 + a_n)/2$, ya que $a_n = an + b\ ,\ n \geq 1$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Sea $\{g_n\}_{n \geq 1}$, una progresión geométrica, que podemos considerar, sin pérdida de generalidad, positiva y creciente.

Para todo n, designamos por T_n , R_n , T_n^* las figuras geométricas siguientes:

$T_n = T_1\ \ldots\ldots\ T_n$ (unión de triángulos)

$R_n = R_1\ \ldots\ldots\ R_n$ (unión de rectángulos)

$T_n^* = T_1^*\ \ldots\ldots\ T_n^*$ (unión de trapecios)

tal como se indica en la figura 16.

Entonces, calculando las áreas de T_n , R_n , T_n^* , se tiene

$$A(T_n) = \sum_{i=1}^{n} A(T_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)/2 = (a_{n+1} - a_1)/2$$

$$A(T_n^*) = \sum_{i=1}^{n} A(T_i^*) = \sum_{1=1}^{n} (a_{i+1} + a_i)/2$$

Y, como $T_n^* = R_n \cup T_n$, se tiene para las áreas

$A(R_n) + A(T_n) = A(T_n^*)$, y de aquí

$S_n + (a_{n+1} - a_1)/2 = (a_1 + a_2)/2 + (a_2 + a_3)/2 + \ldots + (a_n + a_{n+1})/2$

$= a_1(1 + r)/2 + \ldots + a_n(1 + r)/2 = S_n(1 + r)/2$

de donde

$$S_n\left(\frac{1 + r}{2} - 1\right) = (a_{n+1} - a_1)/2 \Longrightarrow S_n(r - 1) = (a_{n+1} - a_1)/2$$

y, si $r \neq 1$, resulta finalmente

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1}$$

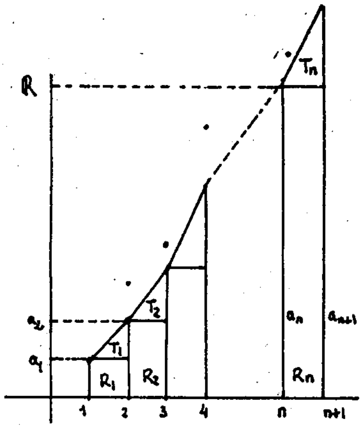


fig. 16

Observación

Hemos hecho un estudio comparativo de los conceptos, propiedades y fórmulas relativos a las p.a. y las p.g. positivas. Las propiedades, fórmulas y problemas se corresponden (debido a la función logarítmica, para las p.g. positivas). En esta correspondencia casi completa, se logra una economía considerable de pensamiento en la presentación de los algoritmos. Dicha correspondencia -más aún, este isomorfismo- se establece como sigue:

suma-producto ; diferencia-cociente ; coefic.-exponente ; divisor-índice de una raiz.

Sin embargo, la fórmula que da la suma de los n primeros términos no se corresponde.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL,T. - Calculus,I y II - Ed. Reverte

REY PASTOR,J. - Análisis algebraico - Biblioteca Matemática

USPENSKY y HEASLET - Elementary Number Theory - McGraw-Hill

GOLDBERG,S. - Ecuaciones en diferencias finitas - Marcombo

COURANT-ROBBINS - ¿Qué es la Matemática? - Ed. Aguilar.

POLYA,G. - Matemáticas y razonamiento plausible - Ed.Tecnos

YAGLOM,I.M. y GOLOVINA,L.I. - Inducción en la Geometría -Ed. Tecnos

SOMINSKI - Método de inducción matemática

LIDSKY - Problemas de matemáticas elementales - Ed. Mir

HALL y KNIGHT - Algebra Superior - Uteha