LAS PROGRESIONES Y SU ESTUDIO ARITMETICO-GEOMETRICO (1)

Juan B. Romero Márquez
I.B. "Isabel de Castilla"
Avila

1. INTRODUCCION

El objetivo de este artículo es utilizar ciertas interpretaciones de las sumas de algunas series en su aspecto finito y, en particular, obtener la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética y de una geométrica, mediante procedimientos geométricos.

Este trabajo puede ser interesante desde el punto de vista metodológico-didáctico y pedagógico, ya que, mediante este tratamiento geométrico, podemos estudiar muchos de los tópicos de las progresiones y, a la par, sirve de revulsivo para reivindicar la geometría métrica elemental.

El estudio geométrico de las progresiones permitirá visualizarlas de forma geométrica concreta. Servirá también como ejemplo de matemática constructiva y participativa, que tanto falta en nuestras aulas, si se dispone o construye sobre la marcha por alumnos y profesores el material didáctico necesario para la consecución de los objetivos marcados, a saber : creatividad, investigación, motivación, claridad y participación.

Veremos también que algunos aspectos aritméticos de las progresiones pueden ser tratados por métodos geométricos; a la usanza de los antiguos griegos, maestros refinados en el arte o ciencia de la geometría,que tan altas cotas alcanzó con ellos.

De otra parte,hablaremos de otros procedimientos aritméticos-para la obtención de la suma de los n primeros términos de una progre - sión arimética,geométrica,aritmética-geométrica,etc.,utilizando funda - mentalmente el "principio de inducción finita". Para ello,necesitamos - introducir los conceptos de "suma finita" (introducción del signo Σ) y "producto finito" (Π).

En fin,que utilizando geometría elemental y aritmética básica e introduciendo la "inducción gráfica e intuitiva",se puede realizar - una experiencia razonable en B.U.P. Georges Papy,en su tratado de Matemática Moderna,empleando modelos geométricos,hace una experiencia similar para probar las propiedades de los números combinatorios.

2. MOTIVACIONES Y EJEMPLOS

En lo que sigue, R es el cuerpo totalmente ordenado,arquime - diano y completo de los números reales,introducido axiomáticamente.

Lo que establezcamos sobre las propiedades de las progresio - nes aritméticas y geométricas,salvo lo relativo a las interpretaciones-geométricas de dichas propiedades,es válido en el cuerpo C de los números complejos.

Comenzaremos con varios ejemplos particulares de motivación,-de lo que luego veremos y resolveremos en los casos generales,desde los puntos de vista geométrico y algebraico.

Estos ejemplos se pueden materializar en la clase con bloques planos o espaciales de papel grueso. En todos los casos y ejemplos,se - debe hacer notar los movimientos geométricos que efectuamos en la construcción de la figura.

2.A) CÁLCULO DE LA SUMA DE LOS n PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

La idea es asociar a cada número una figura geométrica senci - lla,cuyo área coincida con él.

Como el número 1 es el generador de cualquier número natural,-se comienza asociándole un cuadrado de área unidad,que el alumno debe -

construir. Al 2, le asociamos la unión de dos cuadrados de área unidad.- Al 3, tres cuadrados unitarios. En general, a $n = 1 + 1 + \ldots + 1$, le hacemos corresponder n de estos cuadrados, cuya posición puede variar según los casos. Las figuras siguientes muestran el caso de $n = 4$, es decir, del cálculo de $1 + 2 + 3 + 4$.

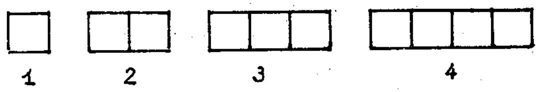


fig 1

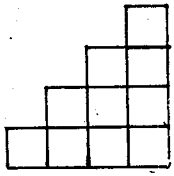


fig 2

Así, se reduce el cálculo de la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, al problema de hallar el área de la figura obtenida por unión de las correspondientes a cada número (fig. 2, para $n = 4$), en la que las dimensiones de la base y la altura valen n.

Construimos luego, por simetría, una nueva figura idéntica, que encaja perfectamente en la primera (fig. 3). Resulta así un rectángulo de n de base y $n+1$ de altura y, en consecuencia, de $n(n+1)$ de área.

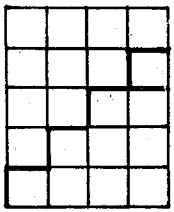


fig 3

El área buscada es, por tanto, $1/2\, n\,(n + 1)$. Consecuentemente podemos escribir :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1/2\, n\,(n + 1)$$

2.B) Suma de los n primeros naturales impares $(1+3+\ldots+(2n-1))$

Utilizamos la misma asociación anterior, pero las figuras asociadas se disponen y unen como indica la figura 4.

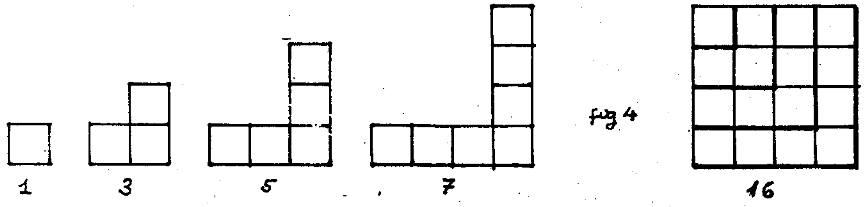


fig 4

En el caso general, la figura geométrica asociada a $2n-1$ está formada por n cuadrados unitarios a lo largo de cada lado.

Si comparamos este caso con el 2.A veremos que a un mismo número podemos asociarle figuras distintas, pero equivalentes en área. De otra parte, las dos figuras asociadas a un mismo número coinciden en el número de cuadrados unitarios que las componen, aunque están dispuestos de distinta forma. De aquí se deduce que estamos haciendo geometría: movimientos, descomposición, equivalencia, áreas, etc.

Todas las áreas construidas se unen para formar un cuadrado de lado n y, por tanto, será

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2$$

2.C) Suma de los cuadrados de los n primeros naturales

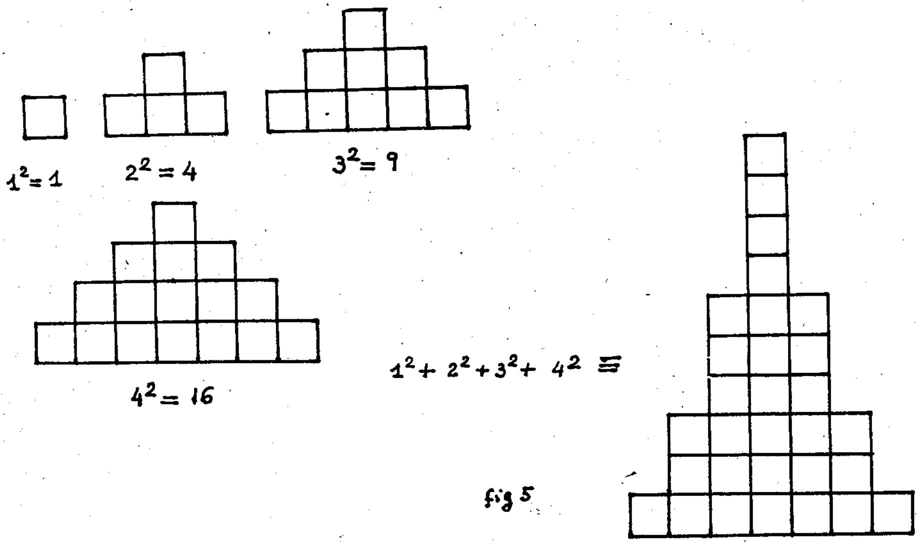
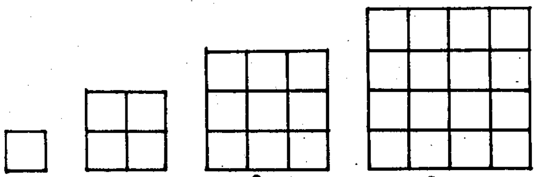


fig 5

También podemos asociar a los números las figuras siguientes -



$1^2=1$ $2^2=4$ $3^2=9$ $4^2=16$

y, por unión, obtener las figuras 6 y 7, equivalentes en área a la 5 :

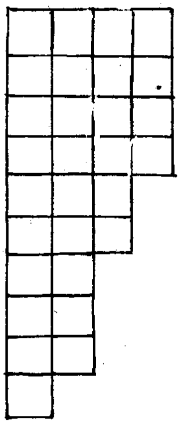


fig 6

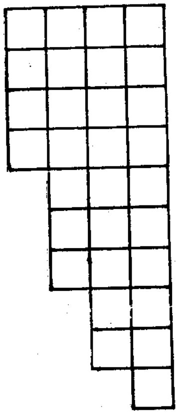


fig 7

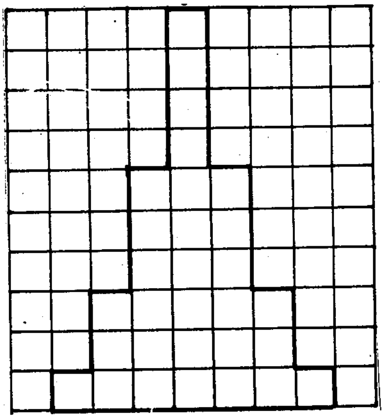


fig 8

Encajando estas a ambos lados de la 5 obtenemos un rectángulo de lados 9 y 10 (fig.8). La tercera parte de su área es la suma de los - cuadrados de los cuatro primeros números naturales.

Nota:

Los antiguos griegos se interesaron por los números que pueden asociarse a figuras geométricas planas o espaciales. Estos números, que - se denominan "poligonales" o "figurados", pueden ser definidos de forma - puramente geométrica. También pueden ser estudiados desde el punto de - vista algebraico ; así lo haremos al final de este trabajo, viendo con - detalle sus aspectos aritmético, geométrico y combinatorio.

3. PROGRESIONES ARITMETICAS

3.A) DEFINICIÓN 1.- Una sucesión $s : N \to R$ es una progresión aritmética si $\exists a, b \in R$ tal que $s_n = an + b$, $n \in N$, esto es, una progresión aritmética es la restricción de la función afín $f(x) = ax + b$ de R en R sobre N. Por tanto, el grafo plano de una p.a $(n, an+b)$, $n \in N$ está constituido por una red discreta del plano (fig.9).

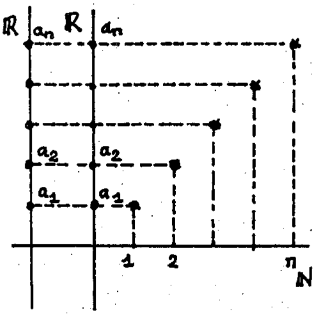


fig 9

Los grafos plano y lineal de una p.a. son conjuntos a lo más numerables, de N x R respectivamente de R, uniformemente distribuidos o igualmente espaciados.

De esta asociación de la p.a. con su grafo, surge la fuente que permite establecer muchas de sus propiedades.

A la restricción de la progresión $[p, q]$, $p < q$ a un intervalo de números sucesivos (consecutivos) se le llama también progresión (finita).

Observaciones:

. Cuando hablamos de subconjuntos S de N -o de cualquier otro conjunto-, obtenidos mediante imágenes de aplicaciones $f: N \to S$ decimos que dichos subconjuntos son a lo más numerables.

. Como toda recta de R^2 es creciente o decreciente, cabe esperar que toda p.a. también lo sea.

PROPOSICIÓN 1.- La progresión aritmética $\{a_n\}_{n>1}$ es creciente (respectivamente decreciente) si y sólo si $a \geqslant 0$ (respectivamente $a \leqslant 0$).

Demostración :

$\{ a_n \}_{n\in N}$ es creciente $\Longleftrightarrow \forall n\in N \;,\; a_{n+1} \geq a_n \Longleftrightarrow$
$\forall n\in N \;,\; a_{n+1} - a_n \geq 0$

$0 \leq a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (na+b) = a \;,\; \forall n\in N$

Lo mismo se prueba para las p.a. decrecientes.

3.B) DETERMINACIÓN DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Si $\{ a_n \}_{n\geq 1}$, $a_n = an + b$, $a,b\in R$, es una progresión aritmética, vemos que el término general depende de dos condiciones o parámetros. En consecuencia, necesitamos dar dos condiciones para determinar una progresión aritmética (piénsese que una recta queda determinada por dos puntos).

Problema.- Dados dos términos cualesquiera distintos a_p , a_q , $p,q\in N$, determinar la p.a. que los contiene (fig.10).

Si a_p , a_q son dos términos de la p.a. $\{ a_n \}_{n\geq 1}$, es $a_n = an+b$, $n\in N$ y tenemos

$$\left.\begin{aligned} a_p &= pa + b \\ a_q &= aq + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_p - a_q = (p-q)a$$

y, como es $p < q$, resulta :

$$a = \frac{a_p - a_q}{p - q} \quad \text{(pendiente de la recta)}$$

$$b = a_p - pa = a_p - p\,\frac{a_p - a_q}{p - q} = \frac{p\,a_q - q\,a_p}{p - q} \quad \text{(ord. en oríg.)}$$

La traducción geométrica de esta propiedad es que la gráfica de una función afín, que es una recta, queda completamente determinada si se conocen dos de sus puntos.

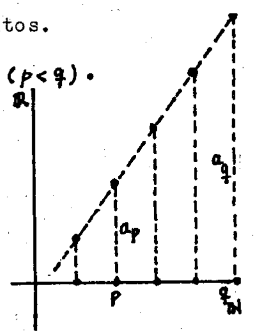


fig 10

PROPOSICIÓN 2.- Si $p, q, r \in \mathbb{N}$ y a_p , a_q , a_r son tres términos cualesquiera de una progresioón aritmética, se tiene:

$$a_p\,(r-q) + a_q\,(p-r) + a_r(q-p) = 0$$

Demostración:

Por la proposición 1, se tiene que, para todo n natural es

$$a_n = an+b = \frac{a_p - a_q}{p - q}\, n + \frac{pa_q - qa_p}{p - q}$$

Haciendo en esta expresión $n=r$ y efectuando operaciones, se obtiene:

$$a_p\,(r-q) + a_q(p-r) + a_r(q-p) = 0 \;,$$

que, geométricamente, significa que "los puntos $(p\ ,\ a_p)$, $(q\ ,\ a_q)$ y $(r\ ,\ a_r)$ de la gráfica de la p.a. $\{\ a_n\ \}_{n\geq 1}$ están alineados".

Ejercicio.- Probar que la sucesión $\{\ a_n\ \}_{n\geq 1}$ es creciente(respectivamente decreciente) si y sólo si, para todo p, q natural y $p < q$, es $a_p \leqslant a_q$(resp. $a_q \leqslant a_p$).

3.C) INTERPOLACIÓN DE TÉRMINOS

Si $\{\ a_n\ \}_{n\geq 1}$ es una progresión aritmética creciente(resp.decreciente), dados a_p , a_q con $a_p \leqslant a_q$ (resp. $a_q \leqslant a_p$), hemos visto que:

$$a_n = \frac{a_p - a_q}{p - q}\, n + \frac{pa_q - qa_p}{p - q} \quad , \forall n \in \mathbb{N} \ ,\ p < q$$

Entonces, a los términos de la progresión a_{p+1} , a_{p+2} ,..., a_{q-1}, que están entre a_p y a_q, se les llama interpolados o intercalados.

Problema.- Dados $A, B \in \mathbb{R}$, que forman parte de una p.a., intercalar entre ellos n términos.

Si llamamos $A=a_1$ y $B=a_{n+2}$, se trata de hallar los n términos a_2 , a_3 ,......, a_{n+1} . Como $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}$ están en p.a., entonces, $a_{n+2} = a_1 + (n+1)a$, donde $a=(a_{n+2} - a_1)/(n+1) = (B - A)/(n+1)$. De aquí se deduce que la sección de la prog. buscada es a_1 , a_1+a , ..., a_1+na, a_{n+2}.-

Obsérvese que esta interpolación coincide con la "lineal".

3.D) CARACTERIZACIONES DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

PROPOSICIÓN 3.- Si $\{ a_n \}_{n\geqslant 1}$ es una progresión aritmética, entonces:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_1 + (n-1)a$, donde $a_1 = a + \ell$ y a es la diferencia de la progresión.

b) $\forall \ell, h \in \mathbb{N}$, $a_\ell = a_h + (\ell - h)d$, donde d es la diferencia.

Demostración de a):

Si $\{ a_n \}_{n>1}$ es una p.a., se cumple que $\forall n\in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = a$

Dando valores a n desde 1 hasta $n-1$, se tiene $a_2 - a_1 = a$, $a_3 - a_2 = a$, ... , $a_{n-1} - a_{n-2} = a$, $a_n - a_{n-1} = a$.

Sumando estas igualdades y simplificando:

$a_n - a_1 = (n-1)a \Longrightarrow a_n = (n-1)a + a_1$, $n>1$ y $a_1 = a + \ell$

Demostración de b):

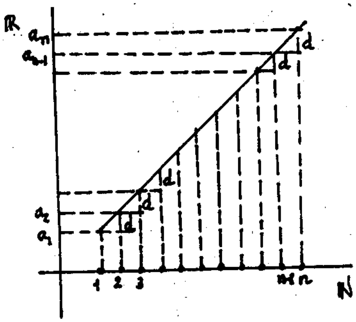
$\forall \ell, h \in \mathbb{N}$, $a_h + (\ell - h)d = a_1 + (h-1)d + (\ell - h)d = a_1 + (\ell - 1)d = a_\ell$

Observaciones :

1) Estas caracterizaciones permiten dar las construcciones geométricas de las progresiones aritméticas (fig.11).

2) Las demostraciones anteriores pueden hacerse por el método de inducción, del que más adelante hablaremos.

fig 11



PROPOSICIÓN 4.- $\{ a_n \}_{n\geqslant 1}$ es una progresión aritmética si y sólo si $\forall n\in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$.

Demostración:

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una p.a.,entonces, $\forall n\in N, a_{n+1} - a_n = cte. = a$, que es la llamada "diferencia" de la progresión. A esta relación se le llama ecuación recurrente o ecuación en diferencias finitas,lineal,de primer orden,con coeficientes constantes.

Según esto,tenemos que $\forall n\geq 2$, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ (ecuación en diferencias finitas,lineal,de segundo orden,con coeficientes constantes).

Además,si $a_n \geq 0$, $\forall n\in N$,obtenemos:

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una p.a $\Longleftrightarrow \forall n\geq 2$, $a_n = (a_{n+1} + a_{n-1})/2$ (media aritmética)

PROPOSICIÓN 5.- Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$,los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una progresión aritmética

b) $\forall n\in N$, $a_n - a_{n-1} = d$ $(n>1)$

c) $\forall n\in N$, $n\geq 2$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$

Demostración (basada en la definición de diferencia y en las proposiciones 3 y 4):

Para ver que b)$\Longrightarrow$a) se procede por inducción.

Obsérvese que c)$\Longrightarrow$b),ya que $\forall n\geq 2$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0 \Longrightarrow$ $\forall n\geq 2$, $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = d$

Además,otra forma de ver que c)$\Longrightarrow$a) es procediendo por inducción,resolviendo la ecuación en diferencias $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$.

Así,tenemos : a)$\Longrightarrow$b)$\Longrightarrow$c)$\Longrightarrow$b)$\Longrightarrow$a).

PROPOSICIÓN 6 (de los términos equidistantes).- Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una progresión aritmética,entonces:

$\forall p,q,m,n \in N$, $m+n = p+q \Longleftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

Demostración:

1º) $\Longrightarrow$

$a_m + a_n = ma + \ell + na + \ell = (m+n)a + 2\ell = (p+q)a + 2\ell =$
$(pa+\ell) + (qa+\ell) = a_p + a_q$

2º) $\Longleftarrow$

Si $a_p + a_q = a_m + a_n$, $\forall p,q,m,n \in N$, $(p+q)a + 2\ell = (m+n)a + 2\ell$

y, si $a \neq 0$, $m + n = p + q$.

En particular:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) = h + (n-h) \quad (1 \leq h \leq n-1) \Longrightarrow$

$$a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = a_h + a_{n-h}$$

2) $n + 1 = (n-1) + 2 = (n-h) + (h+1)$, $0 \leq h \leq n \Longrightarrow$

$$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-h} + a_{h+1} \quad (1 \leq h \leq n)$$

Veamos ahora la interpretación geométrica de esta propiedad (fig.12), que también caracteriza a las progresiones aritméticas, en el caso $n=4$:

Asociamos a cada término de la p.a. a_1 , a_2 , ... , a_n , rectángulos de lados 1 y alturas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tenemos así los rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $a_1.1$, $a_2.1$, ..., $a_n.1$, respectivamente.

Agregamos al rectángulo R_n el R_1 ; al R_{n-1} el R_2 ; al R_{n-1} el R_3 , y así sucesivamente, unidos por el lado superior. En nuestro caso será R_4 a R_1 y R_3 a R_2.

Obtenemos así un rectángulo de lado n (en nuestro caso, $n=4$) y altura $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots$ (para nosotros, $a_1+a_4=a_2+a_3$).

Conviene señalar también que el rectángulo total queda así descompuesto en n rectángulos de áreas iguales. En el caso de $n=4$, se obtienen cuatro rectángulos de áreas iguales a $(a_1+a_4).1=(a_2+a_3).1$. De aquí:

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4(a_1 + a_4) \text{ , de donde}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4(a_1 + a_4) / 2$$

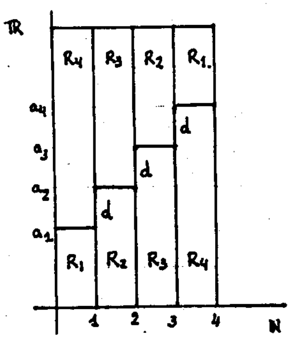


fig.12

En el caso general, se obtiene $2(a_1+a_2+\ldots+a_n) = n(a_1+a_2)$, $\forall n \geq 2$

Esta construcción generaliza la de la función afín $y=x$.